УДК 517.382:531

І. І. ЛЕСЮК, Л. О. ЛИСОВА
Хмельницкий національний університет

ДЕЯКІ ЗАКОНИ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН, ДЛЯ ЯКИХ КООРДИНАТИ ЦЕНТРІВ НЕВИЗНАЧЕНІ

У статті розглянуті різні функції розповсюдження величин в одновимірному просторі, кількісні значення яких визначаються невласними інтегралами на додатній області інтегрування. Приведені умови, при яких координати центрів величин невизначені.

Нехай по осі Ox прямокутної декартової системи координат за законом

$$y = f(x), x \in [0, \infty) \tag{1}$$

розповсюджена фізична величина, для якої є інтервали з різними знаками значень ординат. Такими величинами можуть бути інтенсивності сил, паралельних осі Oy або густина при визначенні центра мас методом від'ємних мас [1] та інше. Отже, в декартових координатах між лініями $y_1 = 0$ і $y_2 = f(x)$ отримуємо плоску фігуру площею S. Декартова координата x_c центра такої фігури визначається [1] за формулою

$$x_c = \frac{S_x}{S}, \qquad S = \int_0^{\infty} f(x)dx, \qquad S_x = \int_0^{\infty} xf(x)dx. \tag{2}$$

Для досліджень, аналогічних виконаним у працях [2,3], розглянемо функції (1), для яких відомі [4] значення S:

1. $Y = \dfrac{\sin(kx)}{x}, k > 0.$

Відомо [4], що $S = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(kx)}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$

Знаходимо:

$$S_x = \int_0^{\infty} x\frac{\sin(kx)}{x}dx = \int_0^{\infty} \sin(kx)\,dx = -\frac{\cos(kx)}{k}\bigg|_0^{\infty} = -\frac{1}{k}(\cos\infty - 1)\ -$$

не визначено, тому x_c – не визначено.

2. $Y = \dfrac{tg(kx)}{x}, k > 0.$

Відомо [4], що $S = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{tg(kx)}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$

Знаходимо:

$$S_x = \int_0^{\infty} x\frac{tg(kx)}{x}dx = \int_0^{\infty} tg(kx)\,dx = -\frac{1}{k}\ln\cos(kx)\bigg|_0^{\infty} = -\frac{1}{k}\ln(\cos\infty)\ -$$

не визначено, тому x_c – не визначено.

3. $Y = \dfrac{\cos(nx) - \cos(mx)}{x}, (m, n) > 0.$

Відомо [4], що $S = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(nx) - \cos(mx)}{x}dx = \ln\frac{m}{n}.$

Знаходимо:

$$S_x = \int_0^{\infty} x\frac{\cos(nx) - \cos(mx)}{x}dx = \int_0^{\infty} (\cos(nx) - \cos(mx))\,dx = \left(\frac{\sin(nx)}{n} - \frac{\sin(mx)}{m}\right)\bigg|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{mn}(m\sin(nx) - n\sin(mx))\bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{mn}(m\sin\infty - n\sin\infty)\ -$$

не визначено, тому x_c – не визначено.

4. $Y = \dfrac{\sin x \cdot \cos(kx)}{x}, k \neq 0.$

Відомо [4], що $S = \int\limits_0^\infty \dfrac{\sin x \cdot \cos(kx)}{x} dx = \begin{cases} 0,5\pi, & |k| < 1, \\ 0,25\pi, & |k| = 1, \\ 0, & |k| > 1. \end{cases}$

Знаходимо:

$$S_x = \int\limits_0^\infty x \frac{\sin x \cdot \cos(kx)}{x} dx = \int\limits_0^\infty \sin x \cdot \cos(kx)\, dx = \int\limits_0^\infty \frac{\sin(1+k)x + \sin(1-k)x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(1+k)x}{1+k} - \frac{\cos(1-k)x}{1-k}\right)\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{2(k^2-1)}\Big[(1-k)\cos(1+k)x + (1+k)\cos(1-k)x\Big]\Bigg|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2(k^2-1)}\Big[(1-k)\cos\infty + (1+k)\cos\infty - 2\Big] \ -$$

не визначено, тому x_c – не визначено.

5. $Y = \cos(x^2)$.

Відомо [4], що $S = \int\limits_0^\infty \cos(x^2) dx = \sqrt{\dfrac{\pi}{8}}.$

Знаходимо:

$$S_x = \int\limits_0^\infty x\cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \cos(x^2)d(x^2) = \frac{1}{2}\Big[\sin(x^2)\Big]\Big|_0^\infty =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin\infty - \sin 0) = \frac{1}{2}\sin\infty \ -$$

не визначено, тому x_c – не визначено.

6. $Y = \sin(x^2)$.

Відомо [4], що $S = \int\limits_0^\infty \sin(x^2) dx = \sqrt{\dfrac{\pi}{8}}.$

Знаходимо:

$$S_x = \int\limits_0^\infty x\sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \sin(x^2)d(x^2) = \frac{1}{2}\Big[-\cos(x^2)\Big]\Big|_0^\infty =$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos\infty - \cos 0) = -\frac{1}{2}(\cos\infty - 1) \ -$$

не визначено, тому x_c – не визначено.

Приведені результати показують, що необхідною умовою невизначеності координати x_c є наявність в приведених законах тригонометричних функцій. Це приводить до невизначеностей ($\sin\infty$), або ($\cos\infty$) при обчисленні S_x .При цьому в $f(x)$ не обов'язкове конкретне значення знаменника x .

Список використаних джерел

1. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1990. – 607 с.

2. Лесюк І. І. Про координати центра маси однорідної плоскої фігури, площа якої визначається невласним інтегралом // Доповідь на науково-методичній конференції викладачів ТУП. – Хмельницький: ТУП, 12.02.2002 р.

3. Лесюк І. І., Лисова Л. О. Нескінченність кооррдинат центра маси, яка визначається невласним інтегралом.// Тези доповідей. Міжнародна науково-технічна конференція. Проблеми математичного моделювання сучасних техгологій (ПММ-2002). – Хмельницький: ТУП, 2002. – 75 с.

4. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. – М.: Наука, 1986. – 544 с.